参赛队员：钮敏学、蔡偌箐

学校：华东师范大学第二附属中学

省份：上海市

指导教师：戴中元

论文题目：形如$a^x + b^x = c^x$的简单指数方程解的无理性判定

摘要

从高一数学课堂上求指数方程$3^x + 4^x = 5^x$的解出发,我们利用有理数域代数扩张的方法给出$a^x + b^x = c^x$的简单指数方程解是有理数或无理数的判定方法.对于方程左边多于两项的情况,如$a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x = d^x$的方程,要判定解是否是无理数是个比较困难的问题,我们根据已有的结论得到若方程无整数解,则此时方程的解不可能是分母为2的有理数.最后我们根据有理数域代数扩张的方法,得到在某些特殊情况下,方程的解不可能为分母是某些数的有理数.

关键词：指数方程 代数扩张 单位根

Abstract

Starting from the roots of the equation $3^x + 4^x = 5^x$ discussed in the Tenth Grade, we utilized the method, the algebraic extension of the rational number field, to produce the ways to judge whether the roots of the basic exponential equation with a form as $a^x + b^x = c^x$ are rational or not. For equations with more than two terms on the left side, as is the equation $a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x = d^x$, the determination of whether the root was irrational was comparatively difficult. Therefore, based on present theories, we merely provided a conclusion that if the equation doesn't have integer roots, the roots won't be a rational number with a denominator of two. Finally based on the method, the algebraic extension of the rational number field, we concluded that under special occasions, the root of the equation can't be some rational numbers with certain denominators.

Keywords:exponential equation, algebraic extension, unit root

第一章　引言

高一数学课堂上,我们曾经利用指数函数的单调性分析并证明方程$3^x+4^x=5^x$ 唯一整数解为$x=2$,方程$3^x+4^x+5^x=6^x$ 的唯一整数解是$x=3$. 同理可证$3^x+4^x=6^x$ 没有整数解.课后,我们进一步猜想该方程没有有理数解.为此,我们对形如$a^x+b^x=c^x$及相似的简单指数方程,由简入难地进行了分析,证明了该方程不存在有理数解,并在更多项的情况下得到了一些推论.

第二章　对形如$a^x+b^x=c^x$的简单指数方程的研究

以下引理为研究过程中用到的结论:

引理1. 多项式y^x-d在有理数范围内能因式分解的充要条件是存在$m(m\in\mathbb{Z}^+\backslash\{1\})$,使得$d=d_1^m$, 且$x=x_1m$. 其中$d_1$,$x_1$ 均为正整数.

证明: 充分性:当存在这样的m时,原方程可化为$({y_1}^{x_1})^m = d_1^m$. 显然,当$y_1^{x_1}=d_1$ 时,原方程成立,因此至少有${y_1}^{x_1}-d_1$这一个因式,可分解.

必要性:考虑其在复数范围内分解出的x个因式.

$$y^x-d=(y-\sqrt[x]{d}\xi_1)(y-\sqrt[x]{d}\xi_2)\cdots(y-\sqrt[x]{d}\xi_x)$$

其中$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_x$为1的x次单位根.如果y^x-d有因式$h(y)$,次数为a, 那么它的常数项的绝对值为$\sqrt[x]{d^a}$, 应为有理数.由于d 是整数,$\sqrt[x]{d^a}$ 也就一定是整数.令$d=d_0^p$,p为使得d_0 为整数的最大整数. $\sqrt[x]{d^a}$是整数,则$x\mid ap.a<x$,x不整除a,因此可令$x=hq$, 其中$h\mid a$,$q\mid p$,且$a=a_1h$,$p=p_1q$.取$m=q$. 下证$d=d_1^m$及$x=mx_1$时,d_1,x_1均为整数：

$$d=d_0^m=d_0^{m_1q}=({d_0}^{m_1})^q={d_1}^q,$$

$$d_1=d_0^{m_1}\in\mathbb{Z},x_1=\frac{x}{q}=h\in\mathbb{Z}.$$

证毕.

引理2. 设K/F为任一扩张,$\alpha\in K$,则下列叙述是等价的：

(1)$F(\alpha)/F$是代数扩张,

(2)α 在F上是代数的,

(3)$F(\alpha)/F$是有限扩张.
当有一条件成立,$[F(\alpha):F]$等于α的次数.
证明可参考[1]211页定理3.

将形如类似于$3^x+4^x=6^x$的方程表达为$a^x+b^x=c^x(a,b,c\in\mathbb{Q}^+)$. 我们先对其可能的解的情况进行了简单的分析,得到如下结论：
不妨设$a<b$,
(1)将方程左右同除c^x,化为$(\frac{a}{c})^x+(\frac{b}{c})^x=1$,由指数函数的单调性可知,方程的解唯一.
(2)由简单观察易得,当$a+b<c$时,原方程无整数解.
(3)若方程有解,则a,b均小于$c(x>0)$,或a,b均大于$c(x<0)$.
(4)若$a<b<c$,将方程化为$(\frac{a}{c})^x+(\frac{b}{c})^x=1$后, 由于$(\frac{a}{c})^x<(\frac{b}{c})^x$,易得

$$\begin{cases}(\frac{a}{c})^x<\frac{1}{2},\\(\frac{b}{c})^x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解不等式组,得到x的取值范围为

$$\max\{\log_{(\frac{a}{c})}\frac{1}{2},0\}<x<\log_{(\frac{b}{c})}\frac{1}{2}.$$

(5)同(2),若$c<a<b$,可得x的取值范围为

$$-\log_{(\frac{c}{b})}\frac{1}{2}<x<\min\{-\log_{(\frac{c}{a})}\frac{1}{2},0\}.$$

为了简化问题,我们先讨论了$b=1$的情况.
这时,若该方程有有理数解,则存在p,q (p,q为互质正整数,$p\neq1$),使得

$$c^{\frac{q}{p}}-a^{\frac{q}{p}}=1,$$

令$m=c^q=(1+a^{\frac{q}{p}})^p,n=a^q=(c^{\frac{q}{p}}-1)^p$, 则方程化为了$\sqrt[x]{m}=1+\sqrt[x]{n}$,研究这个简化了的方程，我们得到了命题1:

命题1.形如$\sqrt[x]{m}-\sqrt[x]{n}=1(m,n\in\mathbb{Z}^+,\sqrt[x]{m}$ 不为整数)的方程不存在正整数解.

证明:假设存在正整数x,使得原方程成立.则有$\sqrt[x]{m}=1+\sqrt[x]{n}$.

$$m=(1+\sqrt[x]{n})^x=1+\mathrm{C}_x^1\sqrt[x]{n}+\mathrm{C}_x^2(\sqrt[x]{n})^2+\cdots+\mathrm{C}_x^{x-1}(\sqrt[x]{n})^{x-1}+n,$$

说明$\sqrt[x]{n}$是一个$x-1$次整系数多项式方程的根.又$\sqrt[x]{n}$是方程$y^x-n=0$的根. 因此$\sqrt[x]{n}$ 的最小多项式是上述两个多项式的公因式.

分情况讨论:

1° 若y^x-n是$\sqrt[x]{n}$的最小多项式,而其又是一个$x-1$次整系数多项式方程的根,矛盾!

2° 若y^x-n不是$\sqrt[x]{n}$的最小多项式,则由引理1可知,

存在$d>1$,使得$n=n_1^d$, 且$x=x_1d$.取最大的d,d_{max},使方程（1）可化为

$$\sqrt[x]{m}=1+\sqrt[x_1]{n_1},$$

则$\mathbb{Q}(\sqrt[x]{m})=\mathbb{Q}(\sqrt[x_1]{n_1})$. 由引理2可知$\mathbb{Q}(\sqrt[x]{m})$的扩张次数应当也为$x_1$. 即$\mathbb{Q}(\sqrt[x]{m})$的最小多项式次数为$x_1$. 由于$\sqrt[x]{m}$ 是方程y^x-m的根,因此其最小多项式必是y^x-m 的一个因式.参考引理1 的证明.将y^x-m在复数范围内分解为x个因式的乘积,即

$$y^x-m=(y-\sqrt[x]{m}\xi_1)(y-\sqrt[x]{m}\xi_2)\cdots(y-\sqrt[x]{m}\xi_x),$$

其中$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_x$为1的x次单位根.$\sqrt[x]{m}$ 的最小多项式即取其中的x_1 项相乘,其常数项的绝对值为$\sqrt[x]{m^{x_1}}$,必然是个有理数.即$\sqrt[x]{m}=\sqrt[x_1]{m_1}$. 由于d取了最大,$y^{x_1}-n_1$是$\sqrt[x_1]{n_1}$的最小多项式.重复1° 的讨论,可得矛盾.

证毕.

推广1.1. 形如$\sqrt[x]{m}-\sqrt[x]{n}=k(m,n\in\mathbb{Z}^+,k\in\mathbb{Q},\sqrt[x]{n}\notin\mathbb{Z})$ 的方程不存在正整数解.

证明:将命题1证明过程中的1由$k=\dfrac{q}{p}$代替,仍然可按命题1方法证明,因

此结论也成立.

推广1.2. 形如$\sqrt[x]{m}-\sqrt[y]{n}=k(m,n\in\mathbb{Z}^+,k\in\mathbb{Q},\sqrt[x]{n}\notin\mathbb{Z})$的方程也不存在正整数解.

证明:该方程可化为$\sqrt[xy]{m^y}-\sqrt[xy]{n^x}=k$, 可由推论1.1得到.

参考命题1的证明思路,我们尝试对一般情况下方程根的无理性进行讨论.先对原方程$a^x+b^x=c^x$作如下处理：

将a,b,c分别化为指数为整数且最大的以整数为底数幂形式,即

$$a=a_1^{k_a},b=b_1^{k_b},c=c_1^{k_c}.$$

取$k=(k_a,k_b,k_c)$,并令$y=kx$. 将原方程化为$a_0^y+b_0^y=c_0^y$.若$k\neq 1$,则我们只讨论处理后的方程.以此为基础得到了命题2:

命题2. 当a,b,c化为最简的幂形式时指数无1以外的公因数时,形如$a^x+b^x=c^x$,$(a,b,c\in\mathbb{Q})$的方程,若不存在整数解,则不存在有理数解.

证明:方程左右同除c^x,化为

$$(\frac{a}{c})^x-(\frac{b}{c})^x=1.$$

同样用反证法.若原方程有有理数解,设其为$\frac{q}{p}$(p,q均为互质的正整数).

分别记a^q,b^q,c^q为m,n,k.则

$$\sqrt[p]{\frac{m}{k}}-\sqrt[p]{\frac{n}{k}}=1$$

由于规定a,b,c已化为最简的幂形式时指数无1以外的公因数,所以$\sqrt[p]{\frac{n}{k}}$的最小多项式为$y^p-\frac{n}{k}=0$. 由命题1的证明中的1° 同理,可得矛盾.

应用命题2及指数函数的单调性,我们可以快速地判断上述指数方程解是有理数还是无理数.

例1.方程$27^x+64^x=216^x$.
(1)将方程各项化为底数最小的整数指数幂形式,

$$3^{3x}+4^{3x}=6^{3x}.$$

令$y=3x,3^y+4^y=6^y$.
(2)化为$(\frac{1}{2})^y+(\frac{2}{3})^y=1$,由左边函数单调减,可知方程解唯一.
(3)$y=1$时,方程左边大于右边.$y=2$时,左边小于右边.可知无整数解.
因此原方程的解是无理数.

例2.方程$1^x+4^x=9^x$.
(1)将方程各项化为底数最小的整数指数幂形式,化为

$$1^{2x}+2^{2x}=3^{2x}.$$

(2)令$y=2x$,可得到方程$1^y+2^y=3^y$ 有整数解为$y=1$.
因此原方程的解为有理数$\frac{1}{2}$.

总结上述命题及应用,我们得到如下定理：
定理1 形如$a^x+b^x=c^x$（$a,b,c\in\mathbb{Q}^+$）的方程,找到最大的正整数k使得

$$a^x=a_1^{kx},b^x=b_1^{kx},c^x=c_1^{kx},a_1,b_1,c_1\in\mathbb{Z}$$

令$y=kx$,则化简后的方程$a_1^y+b_1^y=c_1^y$,若:
(1)无整数解,则原方程无有理数解.
(2)有整数解,且$k\mid y$,则原方程有整数解.
(3)有整数解,且不满足$k\mid y$,则原方程有非整数的有理数解.

第三章　对多于三项情况的研究

我们试图对定理1在方程左边为n项和的情况下进行推广,即猜想方程

$$a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x = d^x$$

若按照上节做法化简换元后无整数解,则无有理数解.

　　下文讨论中表示有理数解的$\frac{q}{p}$均表示既约分数.

引理3 设$K \supset E \supset F$ 为F上的扩域,且$[K : F]$有限，则

$$[K : F] = [K : E][E : F].$$

证明可参见[1]211 页定理4.

利用这些基本的结论,我们即可以给出命题3 的证明：

命题3 形如$a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x = d^x$的方程,当$n = 3$ 时,若无整数解,则无分母为2 的有理数解(经过同命题2的处理,使$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 化为$\dfrac{1}{2}$ 次幂形式时指数无1以外的公因数）.

证明： 令$\dfrac{q}{2} = x$(q为与2互质的整数),$m_i = (\dfrac{a_i}{d})^q (i = 1, 2, 3)$,
方程化为$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} = 1 - \sqrt{m_3}, \mathbb{Q}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m_3})$.
数域对于四则运算封闭,$\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$含有元素$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}$,
即$\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}) \supseteq \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2})$, 又由$\dfrac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} = \sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}$,

$$\frac{1}{2}[(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}) + (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})] = \sqrt{m_1},$$

$$\frac{1}{2}[(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}) - (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})] = \sqrt{m_2},$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})$
下证$[\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}) : \mathbb{Q}] \neq [\mathbb{Q}(\sqrt{m_3}) : \mathbb{Q}]$.

已知$[\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{m_3}):\mathbb{Q}]=2$，若$[\mathbb{Q}(\sqrt{m_1},\sqrt{m_2}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{m_3}):\mathbb{Q}]$.由引理3,可知：

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{m_1},\sqrt{m_2}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}):\mathbb{Q}][\mathbb{Q}(\sqrt{m_2},\sqrt{m_1}):\mathbb{Q}(\sqrt{m_1})]$$

$\therefore[\mathbb{Q}(\sqrt{m_2}):\mathbb{Q}(\sqrt{m_1})]=1$,即$\sqrt{m_2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{m_1})$.
根据单扩张的定义(参见[2]),可知

$$\mathbb{Q}(\sqrt{m_1})=\{a_0+a_1\sqrt{m_1}(a_0,a_1\in\mathbb{Q})\}.$$

$\sqrt{m_2}=a_0+a_1\sqrt{m_1}$ 两边平方,$m_2=a_0^2+a_1^2m_1+2a_0a_1\sqrt{m_1}$ 左边为整数,右边为无理数, $[\mathbb{Q}(\sqrt{m_1},\sqrt{m_2}):\mathbb{Q}]\neq[\mathbb{Q}(\sqrt{m_3}):\mathbb{Q}]$
与假设$\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2})=\mathbb{Q}(\sqrt{m_3})$矛盾.证毕.
利用下面这条已知的结论,我们可以将命题3 推广至$n>3$的情况：
引理4 若$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k$为无二次方公因子整数,则$\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\ldots,\sqrt{a_k}$在代数上线性不相关.
命题4 形如$k_1a_1^x+k_2a_2^x+\cdots+k_na_n^x=d^x$的方程,若无整数解,则无分母为2的有理数解(经过同命题2 的处理,使$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 化为$\frac{1}{2}$ 次幂形式时指数无1 以外的公因数).
证明： 同样令$x=\frac{q}{2}((q,2)=1)$, $a_1,a_2,\ldots,a_n$无二次方公因子且是整数, $(\frac{a_1}{d})^q,(\frac{a_2}{d})^q,\ldots,(\frac{a_n}{d})^q$ 无二次方公因子. 由引理4,得
$(\frac{a_1}{d})^q,(\frac{a_2}{d})^q,\ldots,(\frac{a_n}{d})^q$ 在代数上线性不相关. 即

$$k_1\sqrt{\left(\frac{a_1}{d}\right)^q}+k_2\sqrt{\left(\frac{a_2}{d}\right)^q}+\cdots+k_n\sqrt{\left(\frac{a_n}{d}\right)^q}+k_0=0,$$

仅当$k_i(i=0,1,\ldots,n)=0$时成立. 然而现方程中$k_0=-1$,得到矛盾.证毕.

引理3中,如果能将其推广到a_1至a_k的大于2甚至任意次的情况,问题便迎刃而解.然而仅证明二次根式的线性不相关就已相当困难.所以,我们可以通过加上一些限制条件,尽可能地获得特殊情况下的结论.

引理5 若α是$\mathbb{Q}$的m次代数元,β是$\mathbb{Q}$的n次代数元,且$(m,n)=1$,则$\alpha+\beta$是$\mathbb{Q}$ 的mn次代数元.

证明:考虑数域$\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta)$,

$[\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]\Big|[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}],[\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]\Big|[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$,

$\therefore[\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]\Big|m,[\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta):Q]\Big|n$,

又$\because(m,n)=1$,$\therefore[\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]=1,\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta)=\mathbb{Q}$.

考虑α在$\mathbb{Q}$上的最小多项式$f(x)$的所有根为$\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_m$,

β在$\mathbb{Q}$上的最小多项式$g(x)$的所有根为$\beta_1=\beta,\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_n$.

若$\alpha_i+\beta_j=\alpha_k+\beta_l$,则$\alpha_i-\alpha_k=\beta_l-\beta_j$,

由$\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta)=\mathbb{Q}$,可得$i=k,l=j$.

则此时$f(\alpha_1+\beta_1-x)$与$g(x)$只有公因式$x-\beta_1$,且$f(\alpha_1+\beta_1-x)$ 与$g(x)$的系数都属于数域$\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1)$,所以在$\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1)[x]$ 内存在多项式$u(x),v(x)$,使得$f(\alpha_1+\beta_1-x)u(x)+g(x)v(x)=x-\beta_1$.

所以,$\beta_1\in\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1),\alpha_1\in\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1)$.

$\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1)\subseteq\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1)$, 又$\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1)\subseteq\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1)$,

所以$\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1)=\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1)$,

因为$[\mathbb{Q}(\alpha_1):\mathbb{Q}]\Big|[\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1):\mathbb{Q}],[\mathbb{Q}(\beta_1):\mathbb{Q}]\Big|[\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1):\mathbb{Q}]$,

即$m\Big|[\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1):\mathbb{Q}],n\Big|[\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1):\mathbb{Q}]$, 因为$(m,n)=1$,

所以$mn\Big|[\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1):\mathbb{Q}]$,

因为$[\mathbb{Q}(\alpha_1,\beta_1):\mathbb{Q}]=mn$,所以$[\mathbb{Q}(\alpha_1+\beta_1):\mathbb{Q}]=mn$.

所以$\alpha_1+\beta_1(\alpha+\beta)$是$mn$次代数元.证毕.

利用上述结论,我们对有非整数的有理数解的情况下解的分母不可能的取值进行了讨论.基本思路如下:

形如$a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x=d^x$(其中,若将$\frac{a_i}{d}(i=1,2,\dots,n)$化为$\left(\frac{a_i}{d_i}{}^{,}\right)^{x_i}$的形式,（$x_i$ 为使得$a_i^{,}$ 为整数的最大整数),所有的x_i 没有公因数)的方程,令$x=\frac{q}{p}$,用与命题2相同的方法,将其化为${m_1}^{\frac{qx_1}{p}}+{m_2}^{\frac{qx_2}{p}}+\cdots+{m_n}^{\frac{qx_n}{p}}=1$ 的形式,其中$m_i^{x_1}=a_i^x,x_1$ 为使m_i 是整数的最大整数.我们通过讨

论$x_i(i=1,2,\ldots,n)$ 的关系,得到若解为既约分数$\frac{q}{p}p$不可能的取值.
我们来看两个例子.
例3.方程$16^x+25^x+27^x=64^x$.
我们可以得到其没有分母为6的有理数解. 若$x=\dfrac{q}{6}$,则方程可化为$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^q}+\sqrt[3]{\left(\frac{5}{8}\right)^q}+\sqrt[2]{\left(\frac{3}{4}\right)^q}=1$ 这时,$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^q}+\sqrt[3]{\left(\frac{5}{8}\right)^q}):\mathbb{Q}]$ 显然为9的因数,而$[\mathbb{Q}(\sqrt[2]{\left(\frac{3}{4}\right)^q}):\mathbb{Q}]=2$, 2不整除9,因此其扩张次数不相等,得到矛盾.
我们也可以得到它的解不可能是分母为30的有理数.因为这时
$[\mathbb{Q}(\sqrt[15]{\left(\frac{1}{2}\right)^q}+\sqrt[15]{\left(\frac{5}{8}\right)^q}):\mathbb{Q}]$ 为225的因数,而$[\mathbb{Q}(\sqrt[10]{\left(\frac{3}{4}\right)^q}):\mathbb{Q}]=10$,仍不可能相等. 上面方法同样可以用于证明分母为$6p$,$p$的因子不含$2,3$的情况.即上述方程的解的分母不可能是$6p,(p,6)=1$.

上面方法同样可以用于证明分母为$6p$,p的因子不含$2,3$的情况.即上述方程的解的分母不可能是$6p,(p,6)=1$.

例4.方程$2^x+54^x+100^x=65536^x$.
我们可以得到其没有分母为30的有理数解. 若$x=\dfrac{q}{30}$,则方程可化为$\sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^q}+\sqrt[10]{\left(\frac{3}{32}\right)^q}+\sqrt[15]{\left(\frac{5}{128}\right)^q}=1$ 这时,$[\mathbb{Q}(\sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^q}+\sqrt[10]{\left(\frac{3}{32}\right)^q}):\mathbb{Q}]$ 显然为20的因数,而$[\mathbb{Q}(\sqrt[15]{\left(\frac{5}{128}\right)^q}):\mathbb{Q}]=15$, 15不整除20,因此其扩张次数不相等,得到矛盾.
由此总结:针对方程

$$m_1^{\frac{qx_1}{p}}+m_2^{\frac{qx_2}{p}}+\cdots+m_n^{\frac{qx_n}{p}}=1$$

（所有x_i的最大公约数为1）中的每一项,我们讨论$\beta_i=\frac{p}{(p,x_i)}$,即分母为$p$时第$i$项的扩张次数.若任$\beta_{k_1}$ 至β_{k_j} 两两互质（归入组A）,且含有其它所有$\beta_{k_{j+1}}$ 至$\beta_{k_n}(k_1,\ldots,k_j,k_{j+1},\ldots,k_n$是1 至$n$ 的排列.)(归入组B)均不含有的因数,则该方程若无整数解,即可证明其无以p为分母的有理数解.

方程可用$\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$表示为$\sqrt[\beta_1]{m_1}+\sqrt[\beta_2]{m_2}+\cdots+\sqrt[\beta_k]{m_1}=1$,若能按上述情况分组,则根据引理5,A组扩张次数为$l_A=\beta_{k_1},\beta_{k_2},\cdots\beta_{k_j}$,B组的扩张次数$l_B$ 为$\beta_{k_{j+1}},\beta_{k_{j+2}},\cdots,\beta_{k_n}$.
$\beta_{k_1}\beta_{k_2}\cdots\beta_{k_j}$不整除$\beta_{k_{j+1}}\beta_{k_{j+2}}\cdots\beta_{k_n}$,因此两组有理数域上两组数的和的单扩张,即$l_A$ 与l_B扩张次数一定不相等.矛盾.

然而用上述方法能确定的分母的不可能值是有限的,命题5在找到这样的值的情况下,将其推广到了无限个数:

命题5. 形如$a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x=d^x$(其中,若将$\frac{a_i}{d}(i=1,2,\ldots,n)$化为$\left(\frac{a_i'}{d_i}\right)^{x_i}$的形式,（$x_i$ 为使得a_i' 为整数的最大整数),所有的x_i没有公因数) 的方程,若在其无整数解的情况下可以上述方法证得其无以p 为分母的有理数解,则其亦没有以pq (其中$(q,\beta_{k_i})=1,i=1,2,\ldots,n$)

证明思路： 仍参照上方的讨论,符号与上方相同.
$\because (l_A,q)=1,\therefore$分母为$pq$时A 组的扩张次数为$l_Aq$,B组的扩张次数为$l_Bq^2$的因数.设$\frac{l_A}{\left(l_A,\beta_{k_{j+1}}\beta_{k_{j+2}}\cdots\beta_{k_n}\right)}=c$, 则$c\nmid l_Bq^2$,可得$l_Aq\nmid l_Bq^2$,即$l_A'\neq l_B'$, 仍能从扩张次数推出矛盾.
目前我们对于更多项情况的讨论仍然限定于特定情况下,未能找到适用范围更普遍的规律.上述讨论主要的目的在于提供一种思路,希望能起到抛砖引玉的作用.

参考文献

[1] 代数学引论(第二版),聂灵沼,丁石孙,高等教育出版社,2002年4月.

[2] 超越数论基础,于秀源,哈尔滨工业大学出版社,2001年3月.

[3] 简明数论,潘承洞,潘成彪,北京大学出版社,1998年1月.

[4] 超越数引论,朱尧辰,徐广善,科学出版社,2003年1月.

[5] 初等数论难题集,刘培杰,哈尔滨工业大学出版社,2008年11月.

[6] 丢番图方程引论,曹珍富,哈尔滨工业大学出版社,2012年3月.

[7] 无理数引论,朱尧辰,中国科学技术大学出版社,2012年1月.

[8] 幂和不等式与Bowen猜想,周科,王云葵,广西师院学报,1999年6月.

[9] 关于代数数域的扩张次数,陈永高,纪春岗,南京师大学报,第19卷第三期,1996年.